Естественные науки

УДК 511.1
М.С. Бокаева, магистр естественных наук
А.В. Шварц
Инновационный Евразийский университет
E-mail: artur_shw@mail.ru

Некоторое обобщение тождества Фибоначчи

Аннотация. *В статье рассматривается некоторое обобщение классического тождества Фибоначчи (ок. 1170-1250). При этом в наших обобщениях используется теория комплексных чисел. Полученные тождества являются универсальными и применяются в теории чисел, математическом анализе и других разделах математики.*
Ключевые слова: *комплексные числа, тождество Фибоначчи, модуль комплексного числа, мультипликативный и ассоциативный законы, обобщенные комплексные числа.*

Классическое тождество Фибоначчи (ок. 1170-1250) имеет вид

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2, \tag{1}$$

где a,b,c,d – любые вещественные числа.

В частности, это тождество выражает связь между мультипликативностью и аддитивностью суммы квадратов, что очень важно для приложения в кольце целых чисел.

В качестве второго замечания отметим, что это равенство очень четко характеризует определение операции умножения для комплексных чисел.

Рассмотрим комплексные числа Z1, Z2

$$Z1=a+ib;\ Z2=c+id, \tag{2}$$

квадраты модулей которых равны соответственно:

$$\left|Z_1\right|^2=Z_1\cdot\overline{Z}_1=a^2+b^2;\quad \left|Z_2\right|^2=Z_2\cdot\overline{Z}_2=c^2+d^2. \tag{3}$$

Умножим |Z1|2 на |Z2|2 и получим

$$\left|Z_1\right|^2.\ \left|Z_2\right|^2=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right), \tag{4}$$

с одной стороны, и с другой:

$$Z_1\cdot Z_2=\left(ac-bd\right)+i\left(ad+bc\right). \tag{5}$$

Далее, согласно определению модуля комплексного числа, получаем:

$$\left|Z_1\cdot Z_2\right|^2=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2. \tag{6}$$

Следовательно, сравнение равенства (4) и (6) даёт нам тождество Фибоначчи (1).

Таким образом, мы видим, что тождество Фибоначчи намекает на операцию умножения комплексных чисел задолго до их появления.

При применении умножения трёх и более комплексных чисел мы можем доказать ряд обобщений тождества Фибоначчи (в том числе для целых чисел). Приведем один из результатов, полученный в этом направлении.

Теорема 1. Пусть даны комплексные числа:

$$Z_1 = a + ib; \qquad Z_2 = c + id; \qquad Z_3 = e + if. \tag{7}$$

Тогда справедливо равенство:

$$\left|Z_1 Z_2 Z_3\right|^2 = \left(ace - bed - adf - bcf\right)^2 + \left(ade + bce + acf - bdf\right)^2. \tag{8}$$

Доказательство проводится аналогично как для произведения двух комплексных чисел.
Имеем:

$$\left|Z_1 Z_2 Z_3\right|^2 = \left|Z_1\right|^2 \cdot \left|Z_2\right|^2 \cdot \left|Z_3\right|^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)\left(e^2 + f^2\right), \tag{9}$$

с одной стороны. С другой стороны, найдем произведение $\left(Z_1\left(Z_2 \cdot Z_3\right)\right)$, имеем:

$$\left(Z_1\left(Z_2 \cdot Z_3\right)\right) = \left(ace - bed - adf - bcf\right) + i\left(ade + bce + acf - bdf\right). \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\left(Z_1\left(Z_2 \cdot Z_3\right)\right)^2 = \left(ace - bed - adf - bcf\right)^2 + \left(ade + bce + acf - bdf\right)^2. \tag{11}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим в нашей работе обобщение комплексных чисел. Для этой цели рассмотрим подмножество комплексных чисел, которые получены путем расширения множества действительных чисел корнем уравнения $x^2 + \sqrt{m} = \theta$, при m целом, бесквадратном и больше нуля.

$$x^2 + \sqrt{m} = \theta. \tag{12}$$

При m>0 уравнение решится только в комплексных числах. Тогда для упрощения решения введем мнимую единицу i_m. Уравнение (12) принимает вид:

$$x^2 + i_m = 0. \tag{13}$$

Данное уравнение порождает некоторое подмножество комплексных чисел:

$$i = (0,1), \qquad i_m = (0, \sqrt{m}); \tag{14}$$

$$i_m = \sqrt{m}(0,1) = i\sqrt{m}; \qquad i_m^2 = -m.$$
$$C(m) = R(i_m) = \{a + i_m b\}; \tag{15}$$

Получаем общий вид обобщенных комплексных чисел:

$$Z(m) = a + i_m b = a + i\sqrt{m}b. \tag{16}$$

Введем по аналогии с комплексными числами операции сложения и умножения и их связи (распределительные законы):

Пусть даны комплексные числа:

$$Z_1 = a + i_m b; \qquad Z_2 = c + i_m d; \qquad a, b, c, d \in R. \tag{17}$$

Тогда

$$Z_1 + Z_2 = a + c + i_m(b + d); \tag{18}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a + i_m b)(c + i_m d) = (ac - mbd) + i_m(ad + bc). \tag{19}$$

Все основные правила умножения этих же чисел будут аналогичными как при изучении комплексных чисел. Например:

$$Z = a + i_m b; \qquad \overline{Z} = a - i_m b; \tag{20}$$

$$\left|Z \cdot \overline{Z}\right| = \left|Z\right|^2 = a^2 + mb^2, \text{ и т.д.} \tag{21}$$

Теорема 2. Пусть даны два комплексных числы Z1 и Z2, таких, как в (17). Тогда справедливо тождество:

$$\left|Z_1 \cdot Z_2\right|^2 = (ac - mbd)^2 + m(bc + ad)^2. \tag{22}$$

При целых $\{a, b, c, d, m\}$ и при условии $m > 0;\ m \neq k^2;$ k – целое число.

Доказательство:

$$Z_1(m) \cdot Z_2(m) = (a + i_m b)(c + i_m d) = \left(ac - \sqrt{m}bd\right) + i\sqrt{m}(bc + ad). \tag{23}$$

И квадрат модуля этого произведения равен формуле (22).

Получаем, что тождество Фибоначчи также справедливое и для обобщенных комплексных чисел.

Авторы выражают благодарность профессору Д. Исмоилову за постановки задач и проявленный интерес к нашим исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Frances Carney Gies Fibonacci italian mathematician. – Режим доступа: https:// www.britannica.com/biography/ Fibonacci (дата обращения: 20.11.2017).

2 Шмидт Н.М. Приложение комплексных чисел в электротехнике // Молодой ученый. – 2012. – № 2. – С. 320-323.

REFERENCES

1 Frances Carney Gies Fibonacci italian mathematician / Entsiklopediya «Britanika». Mathematician. – Rezhim dostupa: https://www.britannica.com/biography/Fibonacci (data obrashcheniya: 27.11.2017).

2 Shmidt N.M. Prilozhenie kompleksnyih chisel v elektrotehnike // Molodoy uchenyiy. – 2012. – № 2. – S. 320-323.

ТҮЙІН

***М.С. Бокаева**, жаратылыстану ғылымдарының магистрі*

А.В. Шварц

Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)

Фибоначчи жепе-теңдігінің бір жинақтамасы

Мақалада Фибоначчи (1170-1250) классикалық тепе-теңдігінің жинақтамасы берілді, және де осы жұмыста комплекстік сандар теория қолданылады. Нәтижесінде шыққан теңдіктер әмбебап түрінде берілді, сондықтан осы теңдіктер сандар теориясы, математикалық талдау, математиканың басқа да салаларында қолданды мүмкін.

***Түйінді сөздер:** Комплекстіқ сандар, Фибоначчи тепе-теңдіктер, комплекс сандар модулі, мультипликативтік, ассоциативтік заңдар, жалпылама комплекс сандар.*

RESUME

***M.S. Bokayeva,** master of natural sciences*

A.V. Shvarts

Innovative University of Eurasia (Pavlodar)

Some generalization of Fibonacci's identity

A certain generalization of the classical Fibonacci identity (about 1170-1250) is considered in this paper, in our generalizations the theory of complex numbers is used. The identities obtained are universal and are used in number theory, mathematical analysis and other branches of mathematics.

***Key words:** Complex numbers, the Fibonacci identity, the modulus of a complex number, the multiplicative and associative laws, generalized complex numbers.*