Естественные науки

УДК 512.14
Р.С. Ахметов
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
www.kaf_math@ineu.edu.kz

Симметрические многочлены от двух переменных

Аннотация. *В статье рассмотрен метод решения симметрических многочленов от двух переменных, автором разобраны несколько задач этого типа. Среди задач есть и весьма трудные, которые предлагались на математических олимпиадах.*
Ключевые слова: *симметрический многочлен, степенные суммы, неравенство Коши, неприводимость круговых многочленов, математическая индукция.*

Цель данной статьи – познакомить интересующихся читателей с одним довольно общим методом решения систем уравнений высших степеней, который основан на использовании теории симметрических многочленов. Сама теория очень проста, она позволяет решать не только многие системы алгебраических уравнений, но и различные другие алгебраические задачи (решение иррациональных уравнений, доказательство тождеств и неравенств, разложение на множители и т.д.). С помощью теории симметрических многочленов решение этих задач заметно упрощается и, что самое главное, проводится стандартным приёмом.

Примеры симметрических многочленов. Многочлены, в которые x и y входят одинаковым образом, называют симметрическими. Точнее говоря: многочлен от x и y называют симметрическим, если он не меняется при замене x на y и y на x.

Многочлен x^2y+xy^2 – симметрический. Напротив, многочлен x^3+3y^2 не является симметрическим: при замене x на y, y на x он превращается в многочлен y^3-3x^2, который не совпадает с первоначальным.

Приведем важнейшие примеры симметрических многочленов. Как известно из арифметики, сумма двух чисел не меняется при перестановке слагаемых, т.е.

$$x+y=x+y$$

Для любых чисел x и y. Это равенство показывает, что многочлен $x+y$ является симметрическим.

Точно так же из закона коммутативности умножения

$$xy=yx$$

следует, что произведение xy является симметрическим многочленом.

Симметрические многочлены $x+y$ и xy являются самыми простыми. Их называют элементарными симметрическими многочленами от x и y. Для них используют специальные обозначения:

$$\sigma_1=x+y,\ \sigma_2=xy.$$

Кроме σ_1 и σ_2, нам часто будут встречаться степенные суммы, т.е. многочлены x^2+y^2, x^3+y^3, …, x^n+y^n,… Принято обозначать многочлен x^n+y^n через s_n. Таким образом,

$$s_1=x+y,$$
$$s_2=x^2+y^2,$$
$$s_3=x^3+y^3,$$
$$s_4=x^4+y^4,$$
$$\ldots\ldots$$

Основная теорема: Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$ [1].

Существует простой прием, позволяющий получать симметрические многочлены. Итак, если взять любой многочлен от σ_1 и σ_2 и подставить в него вместо σ_1 и σ_2 их выражение $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то получится симметрический многочлен от x и y.

Возникает вопрос, является ли этот прием построения симметрических многочленов общим, т.е. можно ли с его помощью получить любой симметрический многочлен?

Рассмотрение примеров делает это предположение вероятным. Например, степенные суммы s_1, s_2, s_3, s_4 без труда выражаются через σ_1 и σ_2:

$$s_1 = x + y = \sigma_1,$$

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$s_3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2),$$

$$s_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2.$$

В качестве следующего примера рассмотрим олимпиадную задачу, где нужно доказать, что при любых значениях x и y справедливо неравенство:

$$x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$$

Для начала представим симметрический многочлен от x и y в виде многочлена от $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$. Мы получим:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - xy \geq 3(x + y - 1)$$

$$(x+y)^2 - xy \geq 3(x+y) - 3$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_2 \geq 3\sigma_1 - 3$$

$$\sigma_1^2 - 3\sigma_1 + 3 \geq \sigma_2$$

Для доказательства данного неравенства воспользуемся неравенством Коши, где

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

заметим, что неравенство Коши можно представить в виде многочлена от

$$\sigma_1 = x + y \text{ и } \sigma_2 = xy.$$

$$\sqrt{\sigma_2} \leq \frac{\sigma_1}{2},$$

отсюда следует, что $\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1^2}{4}$ или $\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2$

Из полученных нами неравенств составляем систему от двух переменных:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_1 + 3 \geq \sigma_2 \,\big|\cdot 4 \\ \sigma_1^2 \geq 4\sigma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\sigma_1^2 - 12\sigma_1 + 12 - 4\sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0 \end{cases}$$

Чтобы решить систему найдем корни квадратного уравнения:

$$-\begin{cases} 4\sigma_1^2 - 12\sigma_1 + 12 - 4\sigma_2 = 0 \\ \sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 0 \end{cases}$$

$$3\sigma_1^2 - 12\sigma_1 + 12 = 0$$

Мы привели нашу систему уравнений от двух переменных к уравнению от одной переменной:

$$3\sigma_1^2 - 12\sigma_1 + 12 = 0$$

$$D = (-b)^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$$

Так как дискриминант равен нулю, мы получаем два одинаковых корня:

$$\sigma_1 = \frac{12}{2 \cdot 3} = 2,$$

отсюда $3(\sigma_1 - 2)^2 \geq 0$

$$\sigma_1 \in (-\infty; +\infty)$$

σ_1 - имеет множество решений. А это означает, что симметрический многочлен $x+y$ так же имеет множество решений. Следовательно, что для любых значений x и y справедливо данное неравенство, что и требовалось доказать.

Разбор дальнейших приемов дает тот же результат: какой бы симметрический многочлен мы бы не взяли, после более или менее сложных выкладок его удается выразить через элементарные симметрические многочлены σ_1 и σ_2. Таким образом, примеры приводят нас к предположению о справедливости, основной теоремы: Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от $\sigma_1 = x+y$ и $\sigma_2 = xy$.

Переходим к доказательству основной теоремы. Мы проведем его в два приема.

Во-первых:

1. Выражение степенных сумм через σ_1 и σ_2. Сначала мы докажем теорему для степенных сумм.

Теорема: [1]

В каждую степенную сумму $s_n = x^{\mathrm{n}} + y^n$ можно представить в виде многочлена от

σ_1 и σ_2.

С этой целью мы умножим обе части равенства $s_{k-1} = x^{\mathrm{k-1}} + y^{k-1}$ на $\sigma_1 = x+y$. Получим:

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x+y)(x^{\mathrm{k-1}} + y^{k-1}) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) =$$
$$= s_k + \sigma_2 s_{k-2}$$

Таким образом,

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} \tag{1}$$

Из этой формулы вытекает справедливость нашего утверждения. В самом деле, мы уже знаем, что степенные суммы $s_1, s_2, ..., s_{k-2}, s_{k-1}$ выражаются в виде многочленов от σ_1 и σ_2, подставляя эти выражения в формулу (1), мы получим выражение степенной суммы s_k через σ_1 и σ_2. Далее методом математической индукции мы можем последовательно находить выражения степенных сумм через σ_1 и σ_2: зная s_1 и s_2, находим по формуле (1) s_3, затем s_4, s_5 и т. д. Ясно, что рано или поздно мы получим выражение любой степенной суммы s_n через σ_1 и σ_2. Таким образом, наше утверждение доказано.

Формула (1), составляющая основу изложенного доказательства Теоремы, позволяет не только утверждать, что s_n выражается через σ_1 и σ_2, но и позволяет последовательно вычислять выражения степенных сумм s_n через σ_1 и σ_2. Так, с помощью формулы (1) мы последовательно находим:

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$
$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$$
$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

и т.д. В ниже приведенной таблице сведены выражения степенных сумм $s_1, s_2, ..., s_{10}$ через σ_1 и σ_2, эти выражения будут нам полезны при решении задач. Читателю можно самому построить таблицу с помощью формулы (1).

Выражения стенных сумм $s_n = x^{\mathrm{n}} + y^n$ через $\sigma_1 = x+y$ и $\sigma_2 = xy$

s_1	σ_1	s_6	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$	s_7	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$	s_8	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$	s_9	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$	s_{10}	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$
		…	……………………………………

2. Доказательство основной теоремы. Теперь нетрудно завершить доказательство основной теоремы. Любой симметрический многочлен от x и y содержит (после приведения подобных членов) слагаемые двух видов.

Во-первых, могут встретиться одночлены, в которые x и y входят в одинаковых степенях, т.е. одночлены вида $ax^k y^k$. Ясно, что

$$ax^k y^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k,$$

т.е. одночлены этого вида непосредственно выражаются через σ_2.

Во-вторых, могут встретиться одночлены, имеющие разные степени относительно x и y т.е. одночлены вида $bx^k y^l$, где $k \neq l$. Ясно, что вместе с одночленом $bx^k y^l$ симметрический многочлен содержит также и одночлен $bx^l y^k$, получаемый из $bx^k y^l$ перестановкой букв x и y. Иными словами, в симметрический многочлен входит двучлен вида $b(x^k y^l + x^l y^k)$. Предполагая для определенности $k < l$, мы сможем переписать этот двучлен следующим образом:

$$b(x^k y^l + x^l y^k) = bx^k y^k (y^{l-k} + x^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}$$

Так как по доказанной теореме степенная сумма s_{l-k} представляется в виде многочлена σ_1 и σ_2, то и рассматриваемый двучлен выражается через σ_1 и σ_2.

Итак, каждый симметрический многочлен представляется в виде суммы одночленов вида $ax^k y^k$ *и* двучленов вида $b(x^k y^l + x^l y^k)$, каждый из которых выражается через σ_1 и σ_2. Следовательно, любой симметрический многочлен, представляется в виде от σ_1 и σ_2. Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. - М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1967.

REFERENCES

1. Boltjanskij V.G., Vilenkin N.Ja. Simmetrija v algebre. - M.: Nauka, gl. red. fiz.-mat. lit. 1967.

ТҮЙІН

Р.С. Ахметов
Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)

Екі айнымалысы бар симметриялы көпмүшелер

Мақалада екі айнымалыдан симметриялы көпмүшелерді шешу әдісі қарастырылған. Бұл мақалада осы үлгідегі бірнеше есеп талданған. Олардың арасында математикалық олимпиадаларда ұсынылған қиын есептер де бар.

Түйін сөздер: *симметриялы көпмүше, дәрежелік қосындылар, Коши теңсіздігі, дөңгелектік көпмүшелердің жіктелмеушілігі, математикалық индукция.*

RESUME

R.S. Akhmetov
Innovative University of Eurasia (Pavlodar)

Symmetric polynomials of two variables

Annotation. *A method of solving symmetric polynomials of two variables is presented in the article. Several of such problems have been solved. There are very hard problems among them which were included in Mathematical Olympiads.*

Keywords: *symmetric polynomial, power sums, inequality of Koshi, circular polynomials irreducibility, mathematical induction.*