# Естественные науки

**УДК 511**
**Д. Исмоилов**, доктор физико-математических наук, профессор ИНЕУ, член МАН ВШ
**Т.В. Дорожинская**, магистрант специальности «Математика»
E-mail:dtw82@mail.ru

## О решении одного уравнения типа Пелля в целых числах

***Аннотация.*** *Уравнения Пелля представляют собой класс диофантовых уравнений второй степени. Данные уравнения встречаются в разных областях математики. В настоящей статье исследуется обобщение диофантового уравнения Пелля и находится решение в форме многочленов от целых коэффициентов. Подробное исследование теорем и доказательств, предложенных читателю, помогает нам более глубоко осмыслить суть диофантового уравнения. Результатом данной статьи является нахождение наименьшего решения. Проведенное исследование является дополнительным источником изучения уравнений Пелля.*
***Ключевые слова:*** *диофантово уравнение, равенство, теорема, доказательство.*

**Введение**

В заметке исследуется одно диофантово уравнение от двух переменных:

$$x^2 - mxy + y^2 = 1 \tag{1}$$

(при $m \geq 1$; $m$ – целое) в положительных целых числах $\{x,\ y\}$.

Справедливо утверждение:

**Теорема 1**

Уравнение (1)в целых числах $\{x; y\}$ имеет решения, и они являются соседними числами последовательности чисел:

$$\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\varphi_k,\ \dots\};\ \varphi_0 = 0; \varphi_1 = 1 \tag{2}$$

где

$$\varphi_k = m\varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}; k = 2,\ 3, \dots; \tag{3}$$

Доказательство

На основании равенств (2) и (3) предварительно имеем равенства:

$$\varphi_0^2 - m \cdot \varphi_0 \cdot \varphi_1 + \varphi_1^2 = 0^2 - 0 + 1^2 = 1; \tag{4}$$

$\varphi_2 = m \cdot \varphi_1 - \varphi_0 = m$
$\varphi_3 = m \cdot \varphi_2 - \varphi_1 = m \cdot m - 1 = m^2 - 1$
$\varphi_4 = m \cdot (m^2 - 1) - m = m^3 - 2m$
$\varphi_5 = m(m^3 - 2m) - (m^2 - 1) = m^4 - 3m^2 + 1$
$\varphi_6 = m \cdot (m^4 - 3m^2 + 1) - m^3 + 2m = m^5 - 4m^2 + 3m$
$\varphi_7 = m \cdot (m^5 - 4m^2 + 3m) - m^4 + 3m^2 - 1 = m^6 - 5m^4 - 6m^2 - 1$
$\varphi_8 = m\varphi_7 - \varphi_6 = m^7 - 6m^5 + 10m^3 - 4m;$

Проверим, что пара $\{\varphi_1,\ \varphi_2\}$ является решением

$$\varphi_1^2 - m\varphi_1 \cdot \varphi_2 + \varphi_2^2 = 1^2 - m \cdot 1 \cdot m + m^2 = 1; \tag{5}$$

Аналогично проверяются и пары$\{\varphi_2,\ \varphi_3\}$; $\{\varphi_3,\ \varphi_4\}$; …

Действительно, проверим пары $\{\varphi_2,\ \varphi_3\}$.

Имеем:

$$\varphi_2^2 - m\varphi_2 \cdot \varphi_3 + \varphi_3^2 = m^2 - m \cdot m \cdot (m^2 - 1) + (m^2 - 1)^2 = 2m^2 - m^4 + m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \qquad (6)$$

и т.д.

Доказательство общего случая проведем по индукции.

Равенства (4) – (6) показывают, что база индукции выполняется. Предположим, что при $x = \varphi_{k-1};\ \ y = \varphi_k$ выполняется равенство

$$\varphi_{k-1}^2 - m\varphi_{k-1}\varphi_k + \varphi_k^2 = 1.$$

Вычислим левую часть равенства (1) при$x = \varphi_k;\ \ y = \varphi_{k+1}$в предположении, что имеет место равенство (3).

Вычислим равенство

с учетом $\varphi_{k-1}^2 - m\varphi_{k-1}\varphi_k + \varphi_k^2 = 1.$ (Индуктивное предположение)

Имеем на основании равенства

$$\varphi_k^2 - m\varphi_k \cdot \varphi_{k+1} + \varphi_{k+1}^2 = \varphi_k^2 - m\varphi_k(m\varphi_k - \varphi_{k-1}) + (m\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 =$$
$$= \varphi_k^2 - m^2\varphi_k^2 + m\varphi_{k-1} \cdot \varphi_k + m^2\varphi_k^2 - 2m\varphi_k \cdot \varphi_{k-1} + \varphi_{k-1}^2 =$$
$$= \varphi_{k-1}^2 - m\varphi_{k-1}\varphi_k + \varphi_k^2;$$

По индуктивному предположению (3) последнее выражение равно 1.

Таким образом,

$$\varphi_k^2 - m\varphi_k \cdot \varphi_{k+1} + \varphi_{k+1}^2 = \varphi_{k-1}^2 - m\varphi_{k-1} \cdot \varphi_k + \varphi_k^2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

В книге [5] доказательство этого утверждения приведено на языке геометрии. Для полноты изложения приведем его из [5].

Графиком рассматриваемого уравнения является либо эллипс (при $m = 1$), либо пара параллельных прямых (при $m = 2$), либо гипербола (при $m \geq 3$). Для случаев $m = 1, 2$ и $3$ графики с отмеченными на них целыми точками изображены на рисунке 1.

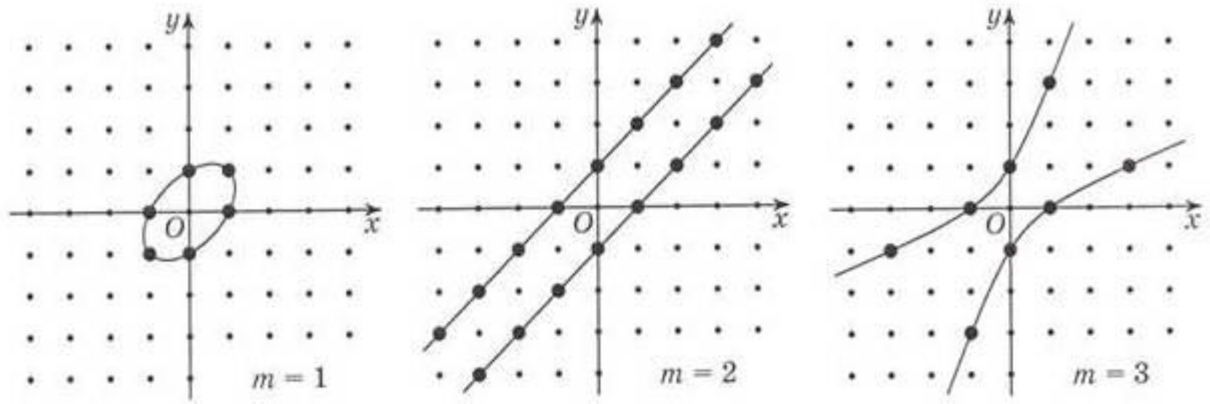


Рисунок 1 – График уравнения $x^2 - mxy + y^2 = 1$

Рассмотрим два преобразования плоскости, задаваемые формулами $f(x,y) = (y, my - x)$и$g(x,y) = (mx - y, x)$. Непосредственная проверка показывает, что они переводят любое решение рассматриваемого уравнения в другое его решение и являются взаимно обратными. В частности, это означает, что пары $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$ являются решениями уравнения. Докажем, что эти пары исчерпывают множество решений, удовлетворяющих условию $0 \leq x < y$.

Предположим противное: имеется решение, лежащее на графике между двумя решениями$(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ и $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$. Применив к нему преобразование $g^k$, получим решение, лежащее между $(-1, 0)$и $(0, 1)$. Противоречие, поскольку такого решения не существует.

Далее мы исследуем алгебраическое представление решения в виде многочленов от $m$. Введем в рассмотрение «коэффициенты» в алгебраической записи последовательности $\varphi_k$, как многочлен от $m$. Другими словами, с учетом формулы

$$\varphi_k = m\varphi_{k-1} - \varphi_{k-1}; k = 2, 3, \dots, ;$$

найдем общее алгебраическое представление последовательности

$\varphi_k = \varphi_k(m);$

Имеет место утверждение.

**Теорема 2**

Пусть выполнены условия исходной задачи, тогда справедливо многочленное представление последовательности $\{\varphi_k; \quad k = 2, 3, \dots\}$

$$\varphi_k = \varphi_k(m) = A_k(0) \cdot m^{k-1} + A_k(1)m^{k-3} + A_k(2)m^{k-5} + \cdots + +A_k(r)m^{k-(2r+1)} \quad (7)$$

где $k-(2r+1) \ge 0 \Rightarrow 0 \le r \le \frac{k-1}{2}; A_k(0) = 1$ для всех $k$ и

$$A_k(r) = (-1)^r \frac{(k-(r+1))(k-(r+2))\dots(k-2r)}{r!}; \quad r \ge 1 \quad (8)$$

при этом $A_k(r)$ - целые числа.

Итак, равенство (7) перепишем коротко

$$\varphi_k = \sum_{0 \le r \le \frac{k-1}{2}} A_k(r) m^{k-(2r+1)} A_k(0) \equiv 1$$

при любом $k \in Z_+$.

Доказательство проводится по индукции, т.е. проверяется равенство (7) (в предположении того, что для всех $1 \le k \le n$выполняется равенство (3)). В теореме 1 показано, что при выполнении равенства (3) имеет место

$\varphi_{k-1}^2 - m\varphi_{k-1}\varphi_k + \varphi_k^2 = 1.$

Отсюда следует, что для коэффициентов многочлена (7) можно получить (с учетом условия (3)) равенство

$$A_{k+1}(r) = A_k(r) - A_{k-1}(r-1) \quad (9)$$

или

$$A_k(r) = A_{k+1}(r) + A_{k-1}(r-1).$$

Приведем некоторые частные случаи для коэффициентов многочлена:

$\varphi_{k+1} = \varphi_{k+1}(m)$: коэффициент при $m^{k-2r}$

$$A_{k+1}(r) = (-1)^r \frac{(k-r)(k-(r+1)) \cdots (k-(2r-1))}{r!}.$$

Далее находим связи между коэффициентами. Заменяя в равенстве (9) $k$ на $k-1$ и $r$ на $r-1$, получим

$$A_{k-1}(r-1) = (-1)^{r-1} \frac{(k-(r+1))(k-(r+2)) \cdots (k-(2r-1))}{(r-1)!} =$$
$$= -(-1)^r \frac{(k-(r+1))(k-(r+2)) \cdots (k-(2r-1)) \cdot r}{r!}$$

Вычтем из $A_k(r)$; $A_{k-1}(r-1)$; $r = 1, 2, \dots$ и получим

$$A_k(r) - A_{k-1}(r-1) = (-1)^r \left[ \frac{(k-(r+1))(k-(r+2)) \cdots (k-(2r-1))}{r!} \cdot \cdot (k-2r+r) \right]$$
$$= (-1)^r \cdot \frac{(k-r)(k-(r+1)) \cdots (k-(2r-1))}{r!}.$$

Это равенство и есть правая часть (6).

Таким образом, мы получили еще одно утверждение.

**Теорема 3**

При всех $k = 1, 2, \dots$;и $A_k(0) = 1$ имеет место равенство

$$A_{k+1}(r) + A_{k-1}(r-1) = A_k(r); \qquad 1 \le r < \frac{k+1}{2}; \quad (10)$$

Отсюда получим еще одно алгебраическое равенство:
Следствие

$$A_k(r) = (-1)^r C_{k-(r+1)}^r, \tag{11}$$

где $C_n^m$ – биномиальные коэффициенты, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

**Доказательство**
По равенству (8) имеем

$$A_k(r) = (-1)^r \frac{(k-(r+1))(k-(r+2))\cdots(k-2r)}{r!}; \tag{12}$$

Дополним числитель и знаменатель множителем
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \big(k-(2r+1)\big) = \big(k-(2r+1)\big)!$
Поэтому из (11) и (12) получим:
$$A_k(r) = (-1)^r C_{k-(r+1)}^r = (-1)^r \frac{\big(k-(r+1)\big)!}{r!\big(k-(2r+1)\big)!}$$
Следовательно, на основании известного равенства $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ получим равенство (9).

Таким образом, общее решение нашего уравнения записывается через многочлены с целыми коэффициентами $\pm C_n^m$;

а именно для любого $k = 1,\ 2, \ldots$ справедливо равенство
$$\varphi_k = C_{k-1}^0 m^{k-1} - C_{k-1}^1 m^{k-3} + C_{k-3}^2 m^{k-5} + \cdots + (-1)^r C_{k-(r+1)}^r + \cdots =$$
$$= \sum_{0 \le r \le \frac{k-1}{2}} (-1)^r C_{k-(r+1)}^r m^{k-(2r+1)} =$$
$$= C_{k-1}^0 m^{k-1} - (k-2)m^{k-3} + \frac{(k-3)(k-4)}{1 \cdot 2} m^{k-5} - \cdots$$
$$+ (-1)^r C_{k-(r+1)}^r m^{k-(2r+1)};$$
$$k-(2r+1) \ge 0$$
$$C_n^m = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!}; & n \ge m \\ 0 & \end{cases}$$
В противном случае $m \notin [0;\ n]$.

Для полноты информации заметим, что общее решение уравнения Пелля

$$x^2 - my^2 = 1 \tag{13}$$

дается формулами:

$$x_k = P_{2k}; \quad y_k = Q_{2k}; \quad P_{2k}^2 - mQ_{2k}^2 = 1, \tag{14}$$

где $P_{2k}$ и $Q_{2k}$ соответственно числители и знаменатели подходящих дробей в разложении $\sqrt{m}$ в цепные дроби; при этом $2k$ подходящая дробь $\delta_{2k}$ определяется равенствами
$\delta_{2k} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$ [3].

Тогда общее решение уравнения (13) представляется равенствами:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left[(x_0 + y_0\sqrt{m})^n + (x_0 - y_0\sqrt{m})^n\right]; \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left[(x_0 + y_0\sqrt{m})^n - (x_0 - y_0\sqrt{m})^n\right]; \end{cases} \tag{15}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots,$

где $(x_0, y_0)$ – наименьшее решение, при этом $x_0 > 0$; $y_0 > 0$, а оно находится с помощью теории цепных дробей.

Решение $[x_0; y_0]$ называется наименьшим, если при $x = x_0$ и $y = y_0$ двучлен $x + \sqrt{m}y$, $\sqrt{m} > 0$, будет иметь наименьшую возможную величину из всех возможных его значений, которые он будет принимать при подстановке вместо $x$ и $y$ всех возможных целых положительных (отличных от нуля) решений уравнения (13) в виде равенств (15).

Например, для уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ наименьшим решением будет $x = 3$, $y = 2$, т.к. при этих значениях $x$ и $y$ принимают наименьшие значения. А именно, эти числа появляются из разложения $\sqrt{2}$ в непрерывную дробь, т.е.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}},$$

где $\delta_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{P_2}{Q_2}$; $P_2 = 3$; $Q_2 = 2$.

Тогда общее решение уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$ будет иметь вид:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n\right];$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n\right],$$

где $x_0 = 3$; $y_0 = 2$; $n = 1, 2, \ldots$;

Таким образом, в зависимости от заданного $m$ мы получим наименьшее решение $[x_0; y_0]$.

Более подробно с уравнениями Пелля рассматриваются в трудах [3],и [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Виноградов И.М. Основы теории чисел. – Москва: Лань, 2004.
2 Бухштаб А.А. Теория чисел. – Москва: Лань, 2014.
3 Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах «ПЛ по математике». – Вып. 8. – Москва: Наука, 1983.
4 Хинчин А.Я. Цепные дроби. – Москва: Наука., 1978.
5 Бугаенко В.О. Уравнения Пелля. – Москва: МНМО, 2001.

## REFERENCES

1 Vinogradov I.M. Osnovy teorii chisel. – Moskva: Lan', 2004.
2 Bukhshtab A.A. Teoriya chisel. – Moskva: Lan', 2014.
3 Gel'fond A.O. Resheniye uravneniy v tselykh chislakh «PL po matematike». – Vyp. 8. – Moskva: Nauka, 1983.
4 Khinchin A.YA. Tsepnyye drobi. – Moskva: Nauka, 1978.
5 Bugayenko V.O. Uravneniya Pellya. – Moskva: MNMO, 2001.

## *ТҮЙІН*

***Д. Исмоилов,*** *физика-математика ғылымдарының докторы, ИнЕУ профессоры, IASH мүшесі*
***Т.В. Дорожинская****, математика ғылымдарының магистрі*

***Pell түрінің бүтін сандардағы теңдеуін шешу туралы***

*Пелл теңдеуі – екінші дәрежелі Диофант теңдеулері класы. Бұл теңдеулер математиканың түрлі салаларында кездеседі. Осы мақалада Diophantine Pell теңдеуін қорытуды зерттеп, бүтін коэффициенттердің полиномы түрінде шешім табамыз. Оқырманға ұсынылған теоремалар мен дәлелдерді егжей-тегжейлі зерделеу Диофант теңдеуінің мәнін тереңірек түсінуге көмектеседі. Осы мақаланың нәтижесі ең кіші шешімді табу болып табылады. Зерттеу Pell теңдеуін зерттеудің қосымша көзі болып табылады.*

***Түйінді сөздер:*** *Диофант теңдеуі, теңдік, теорема, дәлел*

***RESUME***

***D. Ismoilov*** *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Member of IHEAS*
***T.V. Dorozhinskaya****, Master's degree student in Mathematics*

***On the solution of an equation of Pell type in integers***

*The Pell equations are a class of Diophantine equations of the second degree. These equations are found in different areas of mathematics. In this paper we investigate the generalization of the Diophantine Pell equation and find a solution in the form of polynomials of integer coefficients. A detailed study of the theorems and proofs offered to the reader helps us to more deeply comprehend the essence of the Diophantine equation. The result of this article is to find the smallest solution. The study is an additional source of study of Pell's equations.*

***Key words:*** *Diophantine equation, equality, theorem, proof.*