**УДК 514.1**
**Е.М. Асылгазы**
Инновационный Евразийский университет
**Д.И. Исмоилов,** доктор физико-математических наук
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
E-mail: berkutaem@gmail.com

## Некоторые примеры применения комплексных чисел в геометрии

***Аннотация.*** *Статья о геометрической интерпретации комплексных чисел, о возможностях применения преобразования плоскости и примеры решения задач.*
***Ключевые слова:*** *комплексные числа, геометрия, преобразования плоскости.*

Комплексные числа – фундаментальная часть геометрии и математический аппарат для описания движений плоскости. Для понимания сути этих движений обратимся к рисункам:

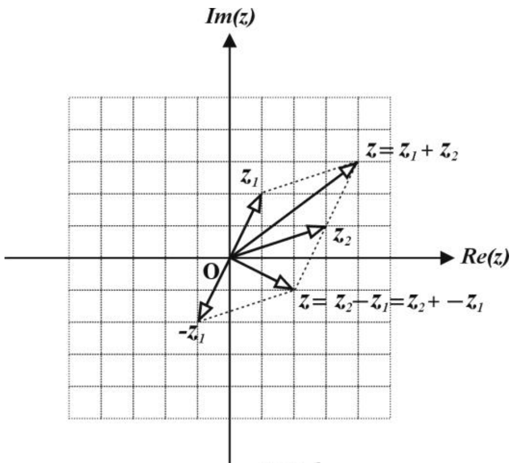

*рис. 1*

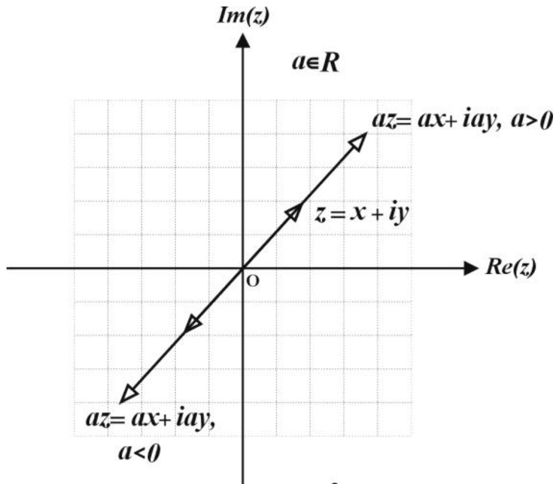

*рис. 2*

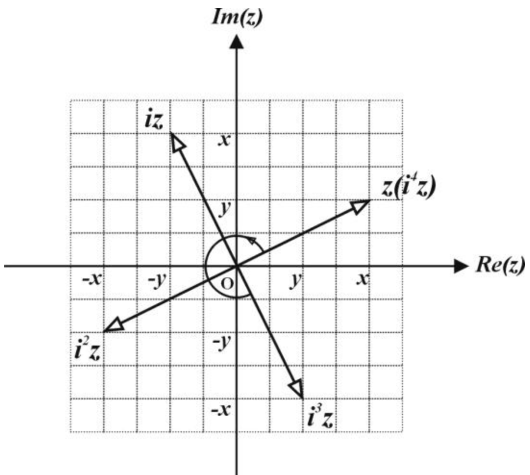

*рис. 3*

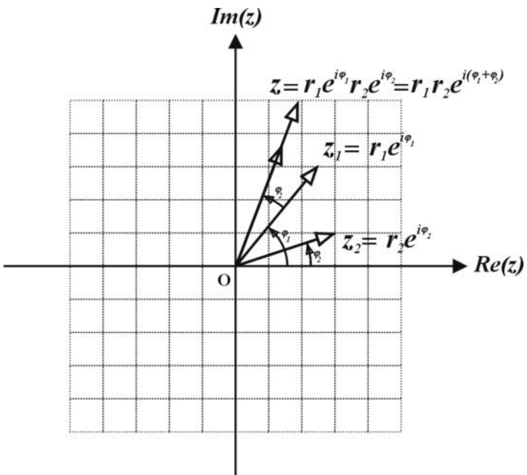

*рис. 4*

На рис. 1 – *параллельный перенос – сумма или разность комплексных чисел.*
На рис. 2 – *растяжение или сжатие – умножение на вещественное число.*
На рис. 3 – *повороты на* $90^O$, $180^O$, $270^O$, $360^O$
Перенос и растяжение понятны с рисунков, покажем повороты с умножением на ***i:***
$\mathbf{iz} = ix + i^2y = \mathbf{-y + ix;}$
$\mathbf{i^2z} = i(iz) = i^2x - iy = \mathbf{-x - iy;}$
$\mathbf{i^3z} = i(i^2z) = -ix - i^2y = \mathbf{y - ix;}$
$\mathbf{i^4z} = i(i^3z) = iy - i^2x = \mathbf{x + iy = z.}$
На рис. 4 – *повороты с растяжением и сжатием – умножение или деление комплексных чисел.*
Некоторые обобщения умножения и деления:
$$z = z_1z_2z_3...z_n = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}r_3e^{i\varphi_3}...r_ne^{i\varphi_n} = r_1r_2r_3...r_ne^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+...+\varphi_n)}$$
и если принять $\mathbf{z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n}$, то

$$z=z_1z_1z_1...z_1=r_1e^{i\varphi_1}r_1e^{i\varphi_1}r_1e^{i\varphi_1}...r_1e^{i\varphi_1}=r_1r_1r_1...\ \ r_1e^{i(\varphi_1+\varphi_1+\varphi_1+....+\varphi_1)}=z_1^n=r_1^ne^{in\varphi_1}$$

из последнего:

$$z_n=\sqrt[n]{r}\,e^{i(\frac{\varphi+2\pi k}{n})}\ ,\ \ k\in\{0,\ 1,\ \dots\ ,\ n\ -\ 1\}$$

и от основного уравнения алгебры $z^n - 1 = 0$, переходим на единичную окружность $\boldsymbol{r = 1}$:

$$z_n=e^{i(\frac{2\pi k}{n})},\ \ k\in\{0,\ 1,\ \dots\ ,\ n\ -\ 1\}$$

запишем в тригонометрической форме:

$$\varepsilon_n=\cos(\tfrac{2\pi k}{n})+i\sin(\tfrac{2\pi k}{n}),\ \ k\in\{0,\ 1,\ \dots\ ,\ n\ -\ 1\}$$

имеем:

$$\varepsilon_0=\cos(0)+i\sin(0)=1;$$

$$\varepsilon_1=\cos(\tfrac{2\pi}{n})+i\sin(\tfrac{2\pi}{n})=\varepsilon;$$

$$\varepsilon_2=\cos(\tfrac{4\pi}{n})+i\sin(\tfrac{4\pi}{n})=\varepsilon^2;$$

$$\dots$$

$$\varepsilon_{n-1}=\cos(\tfrac{4(n-1)\pi}{n})+i\sin(\tfrac{4(n-1)\pi}{n})=\varepsilon^{n-1}.$$

на комплексной плоскости выглядит как правильный n-угольник, в частности для $z^3 - 1 = 0$:

$$\varepsilon_k=\cos(\tfrac{2\pi k}{3})+i\sin(\tfrac{2\pi k}{3}),\ \ k\in\{0,\ 1,\ 2\}$$

это нам дает:

$$\varepsilon_0=1;\ \ \varepsilon_1=\cos(\tfrac{2\pi}{3})+i\sin(\tfrac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\varepsilon;\ \ \varepsilon_2=\cos(\tfrac{4\pi}{3})+i\sin(\tfrac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\varepsilon^2.$$

форму равностороннего треугольника рис. 5:

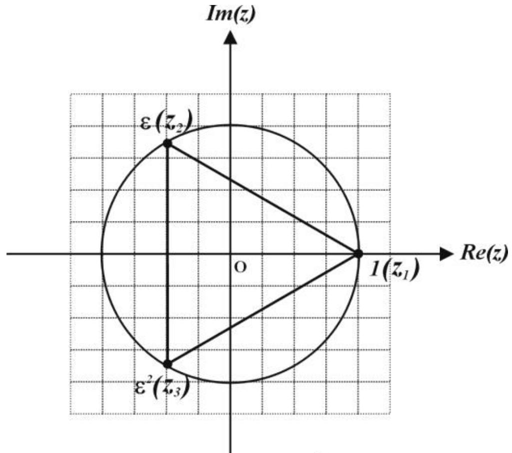


*рис. 5*

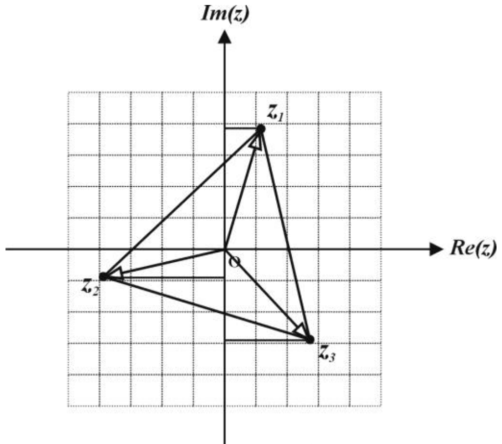


*рис. 6*

Из рис. 5 можно вывести следующие выводы для равностороннего треугольника с комплексными координатами $z_1$, $z_2$, $z_3$:

1) $\boldsymbol{\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}}$;
2) $\boldsymbol{z_3-z_1=(z_2-z_1)\varepsilon}$, *где* $\boldsymbol{\varepsilon=e^{i\pi/3}}$;
3) $\boldsymbol{z_2-z_1=(z_3-z_1)\varepsilon}$, *где* $\boldsymbol{\varepsilon=e^{i5\pi/3}}$;
4) $\boldsymbol{z_1+z_2\varepsilon+z_3\varepsilon^2=0}$, *где* $\boldsymbol{\varepsilon=e^{i2\pi/3}}$;
5) $\boldsymbol{z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}$

***Пример 1.*** Через центр правильного треугольника проведена произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

*Решение.* Прямую выберем как мнимую ось (рис. 6). Пусть вершина A правильного треугольника ABC имеет комплексные координаты $z_1 = x + iy$, требуемое расстояние, это сумма квадратов вещественных частей вершин, выразим остальные вершины $z_2$, $z_3$ через первую, и искомую величину:

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ \varepsilon^2=\bar{\varepsilon}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_2=z_1\varepsilon=(x+iy)(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+i(\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{y}{2});$$

$$z_3=z_1\varepsilon^2=z_1\bar{\varepsilon}=(x+iy)(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}-i(\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2});$$

$$Re^2(z_1)+Re^2(z_2)+Re^2(z_3)=x^2+(-\frac{x}{2}-\frac{y}{2})^2+(-\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{2}(x^2+y^2)=\frac{3}{2}R^2.$$

где R – радиус описанной окружности.

***Пример 2.*** На сторонах четырехугольника вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

*Решение.* Пусть вершины четырехугольника даны комплексными координатами $\boldsymbol{a, b, c, d}$, и центры квадратов $\boldsymbol{a_1, b_1, c_1, d_1}$, и вершины как на рис. 7, $\boldsymbol{z = a_1 - c_1}$, $\boldsymbol{w = d_1 - b_1}$.

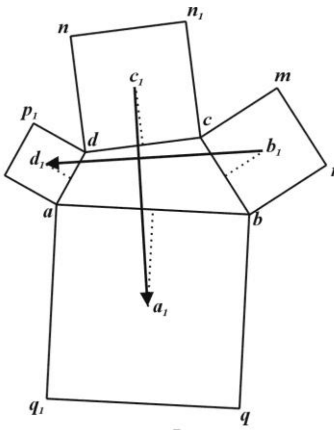

рис. 7

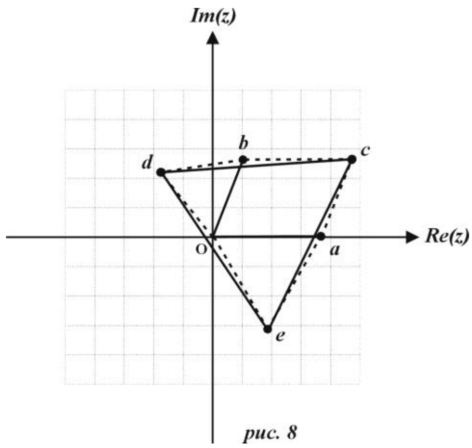

рис. 8

Нам нужно доказать ***z***  ***w***, выразим их через ***a, b, c, d,:***

$$q - b = (a - b)i; \quad q = b + (a - b)i; \quad a_1 = \frac{1}{2}(a + q) = \frac{1}{2}(a + b + (a - b)i);$$

$$m - c = (b - c)i; \quad m = c + (b - c)i; \quad b_1 = \frac{1}{2}(b + m) = \frac{1}{2}(b + c + (b - c)i);$$

$$n - d = (c - d)i; \quad n = d + (c - d)i; \quad c_1 = \frac{1}{2}(c + n) = \frac{1}{2}(c + d + (c - d)i);$$

$$p - a = (d - a)i; \quad p = a + (d - a)i; \quad d_1 = \frac{1}{2}(d + p) = \frac{1}{2}(d + a + (d - a)i);$$

$$z = a_1 - c_1 = \frac{1}{2}(a + b + (a - b)i - c - d + (d - c)i) = \frac{1}{2}(a + b - c - d + i(a + d - b - c));$$

$$w = d_1 - b_1 = \frac{1}{2}(d + a + (d - a)i - b - c + (c - b)i) = \frac{1}{2}(a + d - b - c + i(d + c - a - b)).$$

Где умножение на $i$ это поворот на $90^0$ . В итоге $w$ умножив на $i$ получаем $z$ (учитывая $i^2 = -1$).

***Пример 3.*** Если на двух сторонах параллелограмма, исходящих из одной вершины, построить (не перекрывающиеся с ним) правильные треугольники, то, доказать, что противоположная вершина параллелограмма и свободные вершины треугольников образуют правильный треугольник.

*Решение.* Построим параллелограмм и треугольники на комплексной плоскости и зададим координаты так как на рис. 8 и выразим вершины ***c, d, e*** через ***a, b***:

$$d = be^{i\frac{\pi}{3}}; \quad e = ae^{-i\frac{\pi}{3}}; \quad c = a + b.$$

Треугольник равносторонний тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$c + d\varepsilon + e\varepsilon^2 = 0$, ***где*** $\varepsilon = e^{i2\pi/3}$

подставляя ***c, d, e*** , имеем:

$$a + b + be^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} + ae^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = a + b + be^{i\pi} + ae^{i\pi} = a + b - b - a = 0.$$

***Пример 4.*** Внутри равностороннего треугольника ABC возмем точку M. Точки D, E отражения точек B и C поворотом вокруг M на угол $120^o$, против часовой и по часовой соответственно. Доказать что вершина F параллелограмма MEFD это отражение точки A через M.

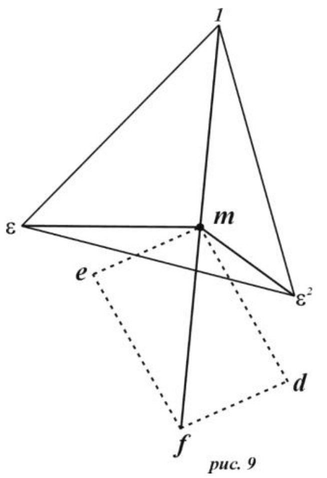

рис. 9

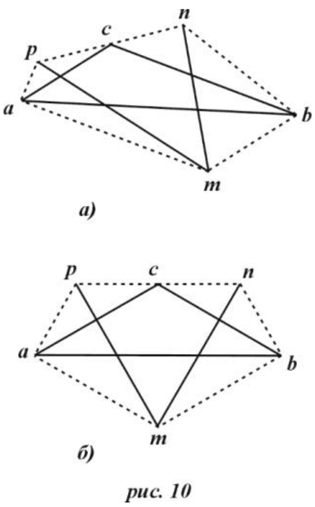

рис. 10

*Решение.* Возьмем на единичной окружности комлексные координаты данных точек как на рис. 9, тогда вершина $f = d + e - m$, используя формулу поворота, имеем:

$d = m + (\varepsilon - m)\varepsilon$; $\quad e = m + (\varepsilon^2 - m)\varepsilon^2$ ;

тогда $f = m + (\varepsilon - m)\varepsilon + m + (\varepsilon^2 - m)\varepsilon^2 = m + \varepsilon^2 + \varepsilon - m(\varepsilon^2 + \varepsilon) = m - 1 + m = 2m - 1;$

и $m = (f + 1)/2 = (2m - 1 + 1)/2 = m$ .

***Пример 5.*** На сторонах треугольника ABC построены как на основаниях подобные данному треугольники ABM, BCN и CAP. Найти углы треугольника ABM, BCN и CAP, если треугольник MNP – равносторонний.

*Решение.* Возьмем на комплексной плоскости координаты вершин как на рис. 10а). Треугольники подобны если выполняется следующие отношения:

$$\frac{m - b}{a - b} = \frac{n - c}{b - c} = \frac{p - a}{c - a} = k$$

откуда

$m = ka + (1 - k)b$ ;  $n = kb + (1 - k)c$ ;  $p = kc + (1 - k)a$ ;

для равностороннего треугольника MNP:

$m + \varepsilon n + \varepsilon^2 p = 0$ ,  $\varepsilon = e^{i2\pi/3}$

$0 = ka + (1 - k)b + \varepsilon kb + (1 - k)\varepsilon c + kc\varepsilon^2 + (1 - k)a\varepsilon^2 =$

$= k(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2) + (1 - k)(b + c\varepsilon + a\varepsilon^2) = k(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2) + (1 - k)/\varepsilon(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)$ .

Так как треугольник ABC не равносторонний, то $\boldsymbol{b + c\varepsilon + a\varepsilon^2 \neq 0}$ и

$k + (1 - k)/\varepsilon = 0$ ,  $k = 1/(1 - \varepsilon)$ ,  $m = ka + (1 - k)b$ ,  $m - a = \varepsilon(m - b)$.

это означает сторона AM выходит поворотом стороны BM на 120°, значит искомый треугольник равнобедренный и углы 120°, 30°, 30° как показано на рис. 10б).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: Московского центра непрерывного математического образования, 2002. – 40 с.

2 Андрианов В.Л. Комплексные числа и их некоторые применения – Н.Новгород, 2007. 24 с.

3 Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. – М.: Едиториал УРСС, 2004. 192 с.

## REFERENCES

1 Arnold V.I. Geometriya kompleksnyih chisel, kvaternionov i spinov. – M.: Moskovskogo tsentra nepreryivnogo matematicheskogo obrazovaniya, 2002. – 40 s.

2 Andrianov V.L. Kompleksnyie chisla i ih nekotoryie primeneniya – N.Novgorod, 2007. 24 s.

3 Yaglom I.M. Kompleksnyie chisla i ih primenenie v geometrii. – M.: Editorial URSS, 2004. 192 s.

## *ТҮЙІН*

***Е.М. Асылғазы***
*Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)*
***Д.И. Исмоилов,*** *физика-математика ғылымдарының докторы*
*Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)*

### *Кешенді сандардың геометрияда қолданудың кейбір мысалдары*

***Аңдатпа.*** *Бұл мақалада кешенді сандардың геометриялық мағынасына қысқаша түсініктеме мен олардың жазықтықты түрлендіру ретінде қолданудың мысалдары, есептері қарастырылған.*

***Түйін сөздер:*** *кешенді сандар, геометрия, жазықтықты түрлендіру.*

## *RESUME*

***E.M. Assylgazy,*** *graduate student, Innovative University of Eurasia*
***D.I. Ismoilov,*** *Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences*
*Innovative University of Eurasia (Pavlodar)*

### *Some examples of the application of complex numbers in geometry*

*The article deals with the geometric interpretation of complex numbers, the possibilities of applying a transformation of the plane, and examples of solving problems.*

***Keywords:*** *complex numbers, geometry, transformation of the plane.*