Естественные науки

УДК 511.1
Т.И. Хасанова
КГУ «Сарышыганакская средняя школа Кызылжарского сельского округа города Аксу»,
Д. Жекебай
Павлодарский педагогический колледж им. Б. Ахметова (г. Павлодар)
E-mail: tolkun-hasanova@list.ru

Исследования одного числового ряда

Аннотация. *В работе рассматриваются некоторые дробно-иррациональное выражение, и доказывается утверждение приводящие их к дробно-рациональным выражениям, а также рассматривается одна общая оценка снизу и сверху (двухсторонняя оценка) для одного числового ряда. При получении некоторых равенств мы воспользовались формулой для биномиальных коэффициентов, затем из суммы левой части сокращали между собой, а слагаемы с четными номерами, где всюду в четной степени в нечетной степени удваиваются и после вывода за скобки множителя все слагаемые остаются свободными от квадратного корня. Рассматриваются несколько вариантов доказательств при решении некоторых задач и теорем.*
Ключевые слова: *иррациональность, рациональность, двухсторонняя оценка, формула бинома Ньютона, биномиальные коэффициенты.*

В настоящей работе исследуется вопрос: как можно класс дробно-иррациональных выражений приводить к дробно-рациональным выражениям, рассматривается также рациональные последовательности и их распределение между целыми числами, а так же исследуется числовой ряд на предмет оценки снизу и сверху.

В первой теореме формируем первое утверждение, где указывается одно из условии решение поставленной задачи. Возможности других способов решений задачи не исключается когда $n = 2k + 1$. Рассматриваются несколько доказательств.

Во второй теореме доказательство утверждения проводится аналогично доказательству теореме 1. Здесь ситуация как будто бы несколько яснее, но это не совсем так за исключением небольших *k*. Здесь основную роль играют также равенства типа (5) – (11). В целом выполненная работа относится к методической работе и полученные результаты, представляют практический интерес для учителей, магистрантов и педагогов, работающих в области преподавания математики.

I. **Постановка задачи**: Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ произвольные вещественные числа, a, b, c вещественные числа удовлетворяющие условиям: $0 < a \le b \le c$. Пусть далее $A_n, B_n, C_n,$ и D_n соответственно определены равенствами:

$$A_n = \sqrt{\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right)^n} \; ; \; B_n = \sqrt{\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right)^n} \; ; \; A_n = \sqrt{\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right)^n}$$

$$C_n = \sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\delta}\right)^n} \; ; \; D_n = \sqrt{\left(\gamma - \sqrt{\delta}\right)^n} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

При каких условиях относительно α, β, γ и δ зависящие от a, b, c, квадратичные иррациональности

$$Q_n^{(1)}(a,b,c) = \frac{A_n + B_n}{C_n - D_n} \; ; \; Q_n^{(2)}(a,b,c) = \frac{A_n + B_n}{C_n + D_n} \qquad (1)$$

будут дробно-рациональными выражениями.

Сформируем первое утверждение, где указывается одно из условии решение поставленной задачи. Возможности других способов решений задачи не исключается.

Теорема 1. Пусть $n = 2k + 1$

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \; ; \; \beta = a \cdot b \; ; \; \gamma = \frac{b+c}{2} \; ; \; \delta = b \cdot c \, . \qquad (2)$$

Тогда справедливо равенство

$$Q^{(1)}_{2k+1}(a,b,c)=\frac{A_{2k+1}+B_{2k+1}}{C_{2k+1}-D_{2k+1}}=\frac{\sum_{m=0}^{k}c^{2m+1}_{2k+1}\,a^{k-m}\,b^m}{\sum_{m=0}^{k}C^{2m+1}_{2k+1}\,c^{k-m}b^m} \tag{3}$$

где $n=2k+1$; $k=0,1,2,...$; $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Следует отметить, что при выполнении условий (2), в соответствии с теоремой о «средних» имеют место

$$\alpha\ge\sqrt{\beta}\ ;\ \gamma\ge\sqrt{\delta}\ , \tag{4}$$

а также по определению a,b,c; $\sqrt{b}\ge\sqrt{a}$; $\sqrt{c}\ge\sqrt{b}$; так, что величины $A_n,B_n,C_n,$ и D_n определены корректно.

Доказательство. Умножим обе части величины $A_n,B_n,C_n,$ и D_n на число $\sqrt{2^{2k+1}}$ и с учетом (2) получим следующие равенства:

$$\sqrt{2^{2k+1}}\cdot A_{2k+1}=\sqrt{\left(2\alpha+2\sqrt{\beta}\right)^{2k+1}}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2k+1}, \tag{5}$$

$$\sqrt{2^{2k+1}}\cdot B_{2k+1}=\sqrt{\left(2\alpha-2\sqrt{\beta}\right)^{2k+1}}=\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^{2k+1}, \tag{6}$$

$$\sqrt{2^{2k+1}}\cdot C_{2k+1}=\sqrt{\left(2\gamma+2\sqrt{\delta}\right)^{2k+1}}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{2k+1}, \tag{7}$$

$$\sqrt{2^{2k+1}}\cdot D_{2k+1}=\sqrt{\left(2\gamma-2\sqrt{\delta}\right)^{2k+1}}=\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)^{2k+1} \tag{8}$$

Как известно [1] (или смотри любой учебник по алгебре, где исследуется формула бинома Ньютона) имеем равенства:

$$\begin{gathered}(x+y)^n=\sum_{m=0}^{n}c_n^m x^{n-m}y^m=\\=x^n+c_n^1\,x^{n-1}y+...+c_n^m\,x^{n-m}\,y^m+...+y^n\end{gathered} \tag{9}$$

Аналогично, с учетом свойства биномиальных коэффициентов $C_n^m=C_n^{n-m}$ имеем

$$\begin{gathered}(y-x)^n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m c_n^m\,y^{n-m}x^m=\\=y^n-c_n^1\,y^{n-1}x+...+(-1)^m\,C_n^m y^{n-m}x^m+...+(-1)^n\,x^n;\end{gathered} \tag{10}$$

В формулах (9) и (10) положим $n=2k+1$; $k=0,1,2,...;$ Тогда с учетом симметричности биномиальных коэффициентов получим равенство

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2k+1}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^{2k+1}=2\sqrt{b}\cdot\sum_{m=0}^{k}C^{2m+1}_{2k+1}\,a^{k-m}b^m \tag{11}$$

При получении равенство (11) мы воспользовались формулой $C_n^m=C_n^{n-m}$ для биномиальных коэффициентов, затем из суммы левой части (11) видно, что все слагаемы с нечетными номерами сокращаются между собой, а слагаемы с четными номерами, где всюду $\left(\sqrt{a}\right)$ в четной степени а $\sqrt{b}$ в нечетной степени удваиваются и после вывода за скобки множителя $2\sqrt{b}$ все слагаемые остаются свободными от квадратного корня [2].

Аналогично рассуждая, с учетом неравенства $\sqrt{c} \geq \sqrt{b}$, получим

$$\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)^{2k+1}-\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)^{2k+1}=2\sqrt{b}\sum_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}\,c^{k-m}\,b^{m} \tag{12}$$

Наконец, найдем их отношение

$$\frac{\sqrt{2^{2k+1}}\cdot\left(A_{2k+1}+B_{2k+1}\right)}{\sqrt{2^{2k+1}}\cdot\left(C_{2k+1}-D_{2k+1}\right)}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}a^{k-m}b}{\sum\limits_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}\,c^{k-m}\cdot b^{m}}= \tag{13}$$

$$=\frac{C_{2k+1}^{1}\,a^{k}+C_{2k+1}^{3}\,a^{k-1}\,b+\ldots+C_{2k+1}^{2m+1}\,a^{k-m}\,b^{m}+\ldots+C_{2k+1}^{2k-1}\,a\,b^{k-1}+b^{k}}{C_{2k+1}^{1}\,c^{k}+C_{2k+1}^{3}\,c^{k-1}b+\ldots+C_{2k+1}^{2m+1}\,c^{k-m}\,b^{m}+\ldots+C_{2k+1}^{2k-1}c\cdot b^{k-1}+b^{k}};$$

Теорема 1 доказана.

Приведем (численные и теоретические) примеры:

1) Пусть $n=1$ то есть $k=0$; В этом случае мы получаем следующее общее утверждение:

При вышеуказанных условиях справедливо тождество

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}+\sqrt{\gamma-\sqrt{\delta}}=\sqrt{\gamma+\sqrt{\delta}}$$

где $0<a\leq b\leq c;\alpha=\dfrac{a+b}{2}$; $\beta=a\cdot b;$ $\gamma=\dfrac{b+c}{2}$; $\delta=b\cdot c$; т.е.

$$\frac{A_1+B_1}{C_1-D_1}=1; \quad \text{при любых } a,\ b,\ c;\ 0<a\leq b\leq c. \tag{14}$$

2) $n=3$ $(k=1)$; Тогда при условиях (2) справедливо равенство

$\dfrac{A_3+B_3}{C_3-D_3}=\dfrac{3a+b}{3c+b}$; $a=2,\ b=3,\ c=4$ тогда $\alpha=2{,}5,\ \beta=6,\ \gamma=3{,}5,\ \delta=12$ и

следовательно, $\dfrac{A_3+B_3}{C_3-D_3}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

3) $\dfrac{A_5+B_5}{C_5-D_5}=\dfrac{5a^2+10ab+b^2}{5c^2+10cb+b^2}$; $a=2,\ b=3,\ c=4$ тогда $\alpha=2{,}5,\ \beta=6,\ \gamma=3{,}5,\ \delta=12$

и следовательно, $\dfrac{A_5+B_5}{C_5-D_5}=\dfrac{5a^2+10ab+b^2}{5c^2+10cb+b^2}=\dfrac{89}{129}$ и так далее.

Замечание. В случаях $a=b=c$ в равенстве (13) для всех $n=2k+1$; $k=0,1,2,\ldots;$ выполняется тождество $A_{2k+1}+B_{2k+1}+D_{2k+1}=C_{2k+1}$, в случае $k=0$ не требуется условие $a=b=c$, оно выполняется для всех $0<a\leq b\leq c$. Тем самым нами получено утверждение.

Справедливо тождество

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}+\sqrt{\gamma-\sqrt{\delta}}=\sqrt{\gamma+\sqrt{\delta}}$$

где $0<a\leq b\leq c;\alpha=\dfrac{a+b}{2}$; $\beta=a\cdot b;$ $\gamma=\dfrac{b+c}{2}$; $\delta=b\cdot c$; т.е.

$$\frac{A_1+B_1}{C_1-D_1}=1; \quad \text{при любых } a, b, c;\ 0<a\le b\le c.$$

В качестве следствия приведем еще один численный пример теоретического характера [3].

4) Пусть $a=N$; $b=N+1$; $c=N+2$. Тогда при $n=1,3,...$

5)

$$\alpha=\frac{2N+1}{2};\ \beta=N^2+N;\ c=N^2+3N+3.$$

Тогда: справедливо равенство при любом $k=0,1,2,...;$

$$\frac{A_{2k+1}+B_{2k+1}}{C_{2k+1}-D_{2k+1}}=\frac{\sum_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}N^{k-m}\cdot(N-1)^m}{\sum_{m=0}^{k}C_{2k+1}^{2m+1}\cdot(N+2)^{k-m}\cdot(N+1)^m}$$

где

$$A_{2k+1}=\sqrt{\left(\frac{2N+1}{2}\right)+\sqrt{\left(N^2+N\right)}}^{\,2k+1};\ B_{2k+1}=\sqrt{\left(\frac{2N+1}{2}\right)-\left(N^2+N\right)}^{\,2k+1}$$

$$C_{2k+1}=\sqrt{\left[\left(\frac{2N+3}{2}\right)+\sqrt{\left(N^3+3N+3\right)}\right]}^{\,2k+1};\ D_{2k+1}=\sqrt{\left[\left(\frac{2N+3}{2}\right)-\sqrt{N^2+3N+3}\right]}^{\,2k+1}$$

В частности, для $k=0;$ получим тождество

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{2N+1}{2}+\sqrt{N^2+N}\right)}+\sqrt{\frac{2N+1}{2}-\sqrt{N^2+N}}}{\sqrt{\frac{2N+3}{2}+\sqrt{N^2+3N+3}}-\sqrt{\frac{2N+3}{2}-\sqrt{N^2+3N+3}}}=1;$$

Продолжим наши исследования, рассмотрим случай $n=2k$ – четные. Имеет место утверждение.

Теорема 2. При $n=2k$; $k=0,1,2,...;$ $0<a\le b\le c$ а также при выполнении условий (2), справедлива формула [4]:

$$Q=\frac{A_{2k}+B_{2k}}{C_{2k}+D_{2k}}=\frac{a^k+\sum_{m=0}^{k}C_{2k}^{2m}a^{k-m}b^m}{c^k+\sum_{m=0}^{k}C_{2k}^{2m}c^{k-m}b^m} \tag{15}$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теореме 1. Здесь ситуация как будто бы несколько яснее, но это не совсем так за исключением небольших *k*. Здесь основную роль играют также равенства типа (5) – (11).

Для ясности изложения рассмотрим некоторые частные случаи: $k=1,2,...$

1) Пусть $k=1$; $n=2$; остальные условия из теоремы 1 сохраняются, тогда после вычисления величин A_2; B_2; C_2; D_2 имеем

2)

$$A_2+B_2=\sqrt{\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)^2}+\sqrt{\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)^2}\Rightarrow A_2+B_2=\sqrt{\left(a+2\sqrt{a\cdot b}+b\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(a-2\sqrt{a\cdot b}+b\right)^2}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2=\left(a+b\right)$$

Аналогично

$$C_2 + D_2 = \sqrt{\left(\gamma + \sqrt{\delta}\right)^2} + \sqrt{\left(\gamma - \sqrt{\delta}\right)^2} \Rightarrow$$

$$C_2 + D_2 = \sqrt{\left(C + 2\sqrt{b \cdot c} + b\right)^2} + \sqrt{\left(C - 2\sqrt{b \cdot c} + b\right)^2} = 2(c + b).$$

Следовательно, (с учетом того, что $c + b > 0$) получим:

$$\frac{2 \cdot (A_2 + B_2)}{2 \cdot (C_2 + D_2)} = \frac{a + b}{c + b};$$

1. Рассмотрим числовой пример

Пусть $k = 2$; $n = 4$ и выполняется требования относительно чисел $\{a, b, c\}$ и соответственно равенства (2). Тогда справедливо равенство (это равенство (15) при $k = 2$).

$$\frac{A_4 + B_4}{C_4 + D_4} = \frac{a^2 + Cab + b^2}{C^2 + 6cb + b^2}; \tag{16}$$

Действительно, имеем:

$$\sqrt{2^4}\left(A_4 + B_4\right) = \sqrt{\left(2\alpha + 2\sqrt{\beta}\right)^4} + \sqrt{\left(2\alpha - 2\sqrt{\beta}\right)^4} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^8} + \sqrt{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^8} = 2\left(a^2 + 6ab + b^2\right)$$

Аналогично

$$\sqrt{2^4} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{c} + \sqrt{b}\right)^8} + \sqrt{\left(\sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^8} = 2\left(c^2 + 6cb + b^2\right).$$

Таким образом, равенство (16) доказано.

Рассмотрим еще один пример на применение теорем 1 и 2. Пусть $a = \cos\varphi$; $b = \sin\varphi$; $c = \sin\varphi + \cos\varphi$; $\frac{\pi}{4} \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда в соответствии равенств (2) и теоремы 1; 2 получим тождества:

1)

$$\sqrt{\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} + \sqrt{\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2} - \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\varphi + 2\sin\varphi}{2} + \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi}{2}}} - \sqrt{\frac{\cos\varphi + 2\sin\varphi}{2} - \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi - \sin 2\varphi}{2}}};$$

2)

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2} - \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{2\sin\varphi + \cos\varphi}{2} + \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{2\sin\varphi + \cos\varphi}{2} - \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi}{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2\sin\varphi + \cos\varphi};$$

Полученные результаты в теоремах 1 и 2 позволяют получать многочисленные практические и теоретические примеры, но мы на этом остановимся.

Далее рассмотрим об оценке одного числового ряда

II. Об одном двойном неравенстве

Пусть n любое натуральное число. Обозначим через S_n сумму аликвотных чисел:

$$S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}; \quad (1)$$

или коротко

$$S_n = \sum_{m=1}^{2n+1}\frac{1}{n+m}; \qquad (2)$$

Вот некоторые из них

$$S_1 = \sum_{m=1}^{3}\frac{1}{m+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$S_2 = \sum_{m=1}^{5}\frac{1}{m+2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7};$$

$$S_3 = \sum_{m=1}^{z}\frac{1}{m+3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10};$$

Имеет место утверждение.

Теорема 1. Справедливы оценки

$$1 < S_n < 2 \qquad (3)$$

Для любого номера n, n=1, 2, …;

Доказательство [1] по равенству (1) имеем (после некоторой группировки членов):

$$S_n = \frac{1}{2n+1}+\left[\frac{1}{(2n+1)-1}+\frac{1}{(2n+1)+1}\right]+\left[\frac{1}{(2n+1)-2}+\frac{1}{(2n+1)+2}\right]+ +\left[\frac{1}{(2n+1)-n}+\frac{1}{(2n+1)+n}\right]; \qquad (4)$$

Далее для любого k=1, 2, …, n получим

$$\left[\frac{1}{(2n+1)-k}+\frac{1}{(2n+1)+k}\right] = \frac{4n+2}{(2n+1)^2-k^2} = \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2-k^2} \to \to \frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{2}{2n+1}.$$

Следовательно, для каждой скобки получим оценку

$$\left[\frac{1}{(2n+1)-k}+\frac{1}{(2n+1)+k}\right] > \frac{2}{2n+1}; \quad k = 1,2,...n. \qquad (5)$$

Поэтому с учетом общее количество таких слагаемых на основании (4) и (5) получим

$$S_n > \frac{1}{2n+1}+\frac{2n}{2n+1} = 1; \quad n = 1,2,3...; \qquad (6)$$

Оценка снизу получена.

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1} < \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \qquad (7)$$

Заменяем остальные слагаемые на $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, ..., \frac{1}{n} > \frac{1}{3n-1}$;

Их количество всего всего $(2n-1)$, то без учета два из них, которых уже оценили формулой (7).

Таким образом, для S_n получим оценку

$$S_n < \frac{(2n-1)}{n} + \frac{1}{n} = 2 \tag{8}$$

Неравенства (6) и (8) доказывает нашу теорему.

$$1 < S_1 = \frac{13}{2} < 2 \text{ ; } 1 < S_2 < 2 \text{ .}$$

Примеры: $S_1 = \frac{13}{2}; S_2 = \frac{153}{140}; S_3 = \frac{1921}{2520} \Rightarrow S_1 > S_2 > S_3$

Упражнение: Вычислите S_4 и S_5, и убедитесь, что $S_1 > S_2 > S_3 > S_4 > S_5$.

$n = 1;$

$$S_1 = \sum_{m=1}^{3} \frac{1}{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = S_0 + \frac{1}{12} \text{ ;}$$

$$\text{Где } S_0 = \sum_{m=1}^{1} \frac{1}{m} = 1$$

$n = 2;$

$$S_2 = \sum_{m=1}^{5} \frac{1}{m+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= S_1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) = S_1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right) = S_1 + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} = S_1 + \frac{1}{105};$$

$n = 3;$

$$S_3 = \sum_{m=1}^{7} \frac{1}{m+3} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) = S_2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= S_2 + \left(\frac{90 + 80 + 72 - 3 \cdot 8 \cdot 10}{8 \cdot 9 \cdot 10}\right)$$

Теорема 2. Для величины $S_n = \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{n+m};$ при $n = 1, 2, ...$

Справедливо равенство

$$S_n = S_{n-1} + \frac{2}{(3n-1)(3n)(3n+1)}; \tag{9}$$

где $S_0 = \sum_{m=1}^{1} \frac{1}{m} = 1;$

Доказательство. При $n = 1, 2, 3;$ справедливости равенств и (9) проверяли, тем самым база индукции имеется. Предположим, что равенство (9) верно при всех $1 \le k \le n.$ Покажем, что оно справедливо и для $k = n+1$. Итак, по предположению индукции верно равенство

$$S_k = S = S_{k-1} + \frac{2}{(3k-1)(3k)(3k+1)}; 1 \le k \le n \tag{10}$$

Покажем, что оно верно и при $k = n+1.$ Действительно, пусть

$$S_n = S_{n-1} + \frac{2}{(3n-1)(3n)(3n+1)};$$

Рассмотрим

$$S_{n-1} = \sum_{m=1}^{2(n+1)+1} \frac{1}{m+(n-1)} = \sum_{m=1}^{2n+3} \frac{1}{m+(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} +$$
$$+ \frac{1}{(3(n+1)-1)} + \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)+1} = S_n - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда по предположению индукции имеем

$$S_{n+1} = S_n + \left(\frac{1}{3(n+1)-1} + \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)+1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

После стандартных подсчетов получим:

$$S_{n+1} = S_n + (3(n+1)-1)(3(n+1))(3(n+1)-1)$$

Утверждение доказано.
Следствие. Из теоремы 1,2 следует, что

1) $(3n+1)(3n) + (3n+1)(3n-1) + (3n-1)\cdot 3n - 3\cdot(3n-1)(3n+1) = 2$; $n = 1, 2, \ldots$

2) $Q_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(3n-1)(3n)(3n+1)} = \frac{S_N - S_0}{2};$

3) $0 < Q_N < 1;\ \lim_{N\to\infty} Q_N = q;\ 0 < q < 1;$

Теперь рассмотрим задачу о распределении рациональных дробей. Имеет место утверждение.
Теорема 3. *Пусть* $m;\ n$ *- взаимно простые натуральные числа. Тогда среди дробей*

$$\frac{k(m+n)}{m};\ \frac{l(m+n)}{n};\ (k = 1,2,\ldots,m-1; l = 1,2,\ldots,n-1)$$

нет равных и не одна из этих дробей не является целым числом.

Доказательство. Будем исходить от противного. Если предположить, что $\frac{k(m+n)}{m} = \frac{l(m+n)}{n}$ для некоторых из указанных *k* и *l*, то отсюда следует $\frac{n}{m} = \frac{l}{k}$, что невозможно, ибо дробь $\frac{n}{m}$ несократимая и $l < n;\ k < m.$

Далее, если предположить, что некоторая дробь $\frac{k(m+n)}{m}$ есть целое число, то из взаимной простоты чисел $m+n$ и m и делимости $k(m+n)$ на m получаем делимость k на $m,$ что невозможно (так как $0 < k < m$), аналогично рассматривается всякая дробь $\frac{l(m+n)}{n}$.

Далее докажем утверждение о распределении этих дробей в отрезках натурального ряда.

Теорема 4. *Пусть* $m;\ n -$ *взаимно простые натуральные числа;* $m > 1,\ n > 1$. *Рассмотрим* $(m+n-2)$ *дробей вида:*

$$\frac{m+n}{n};\ \frac{2(m+n)}{m};...;\frac{(m-1)(m+n)}{m};\ k=1,2,...(m-1) \tag{17}$$

$$\frac{m+n}{n};\ \frac{2(m+n)}{n};...;\frac{(n-1)(m+n)}{n};\ l=1,2,...(n-1) \tag{18}$$

Тогда эти дроби будут находится между соседними натуральными числами $q,\ q+1$ *где* $q=1,2,...,\ m+n-2$ *содержится в точности одна из наших дробой из* (15) *и* (16).

Другими словами, если данные дроби изоброзить точками координатной оси, то в каждом из интервалов $(1;2),(2;3),...,\ (m+n-2, m+n-1)$ числовой оси будет изображена ровно одна из данных дробей (рис 1).

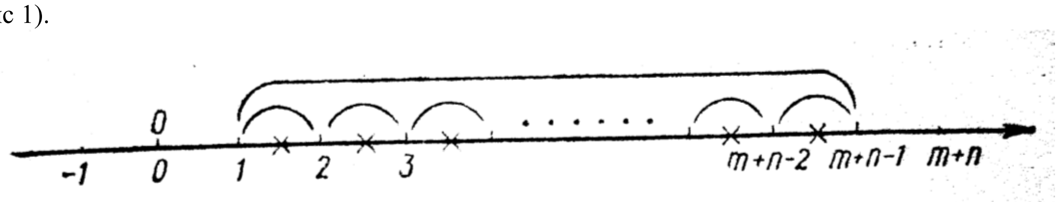

Рисунок 1. [5]

Доказательство. Пусть $s-$натуральное число и $s<m+n.$ Найдем количество наших дробей, заключенных между нулем и $s.$ Пусть $k-$число дробей первого вида, которые меньше $s;\ l-$количество дробей, второго вида, которые меньше $s.$ Тогда имеем

$$\frac{k(m+n)}{m}<s<\frac{(k+1)(m+n)}{m}; \tag{19}$$

$$\frac{l(m+n)}{n}<s<\frac{(l+1)(m+n)}{n}; \tag{20}$$

Отсюда вытекают, что

$$k<\frac{sm}{m+n}<k+1\Rightarrow (\text{из } (15)) \tag{21}$$

$$l<\frac{sn}{m+n}<l+1\Rightarrow (\text{из } (16)) \tag{22}$$

Почленно складывая соответствующие части этих соотношений получаем

$$k+l<s<k+l+2 \tag{23}$$

Следовательно, между двумя целыми числами ($k+l$ и $k+l+2$) имеется единственно целое $s=k+l+1\Rightarrow k+l=s-1.$ [5]

Таким образом, количество наших дробей, не превосходящих s, равно $s-1;$ т.е. $s\geq 2;$ (так как k и l одновременно нулями не будут).

В частности, между 0 и 1 нет заданных дробей. Между 1 и 2 содержится в точности одна заданная дробь, между 2 и 3 содержится в точности одна заданная дробь и т.д.

Таким образом, в общем случае количество дробей, содержащихся между двумя числами q и $q+1\ \ (q=1,2,...,m+n-2),$ равно $q-(q-1)=1;$

Выводы из теорем 3; 4:

1) Если $(m,n)=1$ то все дроби (15) и (16) различные.

2) Ни один из этих дробей не являются целым числом.

3) Между соседними натуральными числами $(q;q+1)$ $(q=1,2,...,m+n-2)$ содержится в точности одна из наших дробей. Другими словами, если данные дроби изобразить точками на координатной прямой, то в каждом из интервалов $(q,q+1);(q=1,2,...,m+n-2);$ числовой оси будет изображена ровно одна из данных дробей.

Данные результаты частично были доложены на конференции [6].

Мы благодарим профессора Исмоилова за постановку задачи, помощь и интерес к нашим исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Бакаева М.С, Исмоилов Д.И, Сарбасова Н.Д. Курс лекций по теории вероятностей и математическая статистика. – Павлодар. – С. 30.

2 Шахно К.У. Элементарная математика. – Москва, 1976. – С.177–190.

3 Супрун В.П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Минск, 1998. – С.75.

4 Балаян. 1001 Олимпиадные и занимательные задачи по математике. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2007. – С. 215.

5 Ляпин С.Е, Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – А., 2015. – С.158–170.

6 Исмоилов Д., Жекебай Д., Хасанова Т. Об одном способе рационализации иррациональностей. Материалы IV Международной научно-практической конференции 2–3 ноября 2016 года. – Том 3. – С.12–16.

REFERENCES

1 Bakaeva M.S., Ismoilov D.I., Sarbasova N.D. Course of lectures on probability theory and mathematical statistics. Republic of Kazakhstan. – Pavlodar. – S.30.

2 Shahno K.U. Elementary mathematics. – Moscow, 1976. – S.177–190.

3 Suprun V.P. Selected problems of increased complexity in mathematics. – Minsk, 1998. – S.75.

4 Balayan. 1001 Olympiad and entertaining tasks in mathematics. – Rostov-on-Donu: Phoenix, 2007. – S. 215.

5 Lyapin S.E., Evseev A.E. Algebra and Number Theory. – A., 2015. – S.158–170.

6 Ismoilov D., Zhekbekai D., Khasanova T. About one method of rationalization of irrationalities. Materials of the IV International Scientific and Practical Conference 2–3 November 2016. – Volume 3. – S.12–16.

ТҮЙІН

Т.И. Хасанова
«Ақсу қаласы Қызылжар селолық округінің Сарышығанақ ауылының орта мектебі» КММ,
Д. Жекебай
Б.Ахметов атындағы Павлодар педагогикалық колледжі (Павлодар қ.)

Кейбір иррационалдық процестер мен бірқатар бір санды екі жақты бағалау

Мақалада кейбір рационалды білдіру және дәлелденнетін бекітуге әкелетін, ұтымды жиындар қаралады, сондай-ақ бір жалпы бағасы - төменнен және жоғарыдан (екі жақты бағалау) бір сандық бірқатар қаралады. Біз бірге кесу сол жағында сомасы, содан кейін биномдық коэффициенттер бойынша формула пайдаланылады және тәртіп шарттары жұп нөмірлі кейбір теңдеулер алғаннан кейін, онда барлық жерде, тіпті дәрежесі тақ дәрежелі екі есе, ал жақшада шығарылғаннан кейінгі барлық терминдер квадрат түбірін түсінікті фактор. Біз белгілі бір проблемалары мен теоремалары шешуде дәлелдемелерді бірнеше нұсқаларын қарастыру.

Түйін сөздер: *иррационалды жиындар, екі жақты бағалау, Бином Ньютон формуласы, амалдар, тепе-теңдік.*

RESUME

T.I. Hasanova
Municipal Public Institution «Saryshyganak secondary general school of Kyzylzhar rural district of Aksu city»
D. Zhekebay
Pavlodar Pedagogical College named after B. Akhmetov (Pavlodar)

Research of one numerical series

In the paper, we consider some fractional and irrational expressions, and prove the assertion that leads them to fractional and rational expressions, and also consider one general lower and upper bound (two-sided estimate) for a one numerical series. In obtaining some congruencies, we used the formula for binomial coefficients, then from the sum of the left side we cancel each other, and the summons with even numbers, where everywhere in an even degree in an uneven degree are doubled even after multiplier was put outside, all the summons remain free from the square root. Several variants of proofs are considered in the solution of certain problems and theorems.

Keywords: *Irrationality, rationality, two-sided estimate, Newton binomial formula, binomial coefficients.*