Естественные науки

УДК 519.21 (075.8)
К.Т. Абдрахманов
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
E-mail: kairjan_bura_naiman@mail.ru

Методы решения интегро-дифференциальных уравнений

Аннотация. *Эта статья предназначена тем, кто столкнулся с задачей решения интегро-дифференциального уравнения, в котором y(x) - искомая функция, K(x,t) и f(x) - известные функции, заданные на отрезке [a, b]. Для решения в данной статье сначала рекомендуется ознакомиться с определениями и теориями интегро-дифференциальных уравнений. Далее рассматриваются методы решения интегро-дифференциальных уравнений и несколько примеров и их решения.*
Ключевые слова: *Уравнение Фредгольма, уравнение Вольтерры, уравнение Урысона, преобразование Лапласа, ряд Тэйлора.*

1. Основные понятия и определения

Интегральным называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Интегральные уравнения вида

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{1}$$

и

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x) \tag{2}$$

называются линейными *интегральными уравнениями Фредгольма* 1-го и 2-го рода, соответственно. Здесь- искомая функция, *K(x,t)* и *f(x)* - известные функции, заданные на отрезке *[a,b]*. Функция *K(x,t)* называется *ядром* интегрального уравнения, а *f(x)* - свободным членом этого уравнения. Если *f(x) = 0*, уравнение называется однородным.

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt + f(x)$$

называются линейными *интегральными уравнениями Вольтерры* 1-го и 2-го рода, соответственно [2]. Ядро интегрального уравнения Вольтерры определяется в треугольнике

$$a \le x \le b,\ a \le t \le x.$$

Ядро *K(x,t)* интегрального уравнения (2) называется *вырожденным,* если оно может быть представлено в виде

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\, q_k(t) \tag{3}$$

Ненулевые значения параметра λ, при которых однородное уравнение Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \tag{4}$$

имеет нетривиальные решения, называются *характеристическими числами* этого уравнения (или ядра *K(x,t)*, а сами решения – *собственными функциями,* соответствующими характеристическому числу λ. Числа $\mu = 1/\lambda$ называются *собственными числами* интегрального уравнения [1].

Интегральные уравнения Вольтерры (4) формально могут рассматриваться как частный случай уравнений Фредгольма (2) с ядром:

$$K_1(x,t) = \begin{cases} K(x,t), & a \le t \le x, \\ 0, & x < t \le b. \end{cases} \tag{5}$$

Несмотря на это, методы решения уравнений Фредгольма отличаются от методов решения уравнений Вольтерра из-за тех требований, которые при этом накладываются на ядро интегрального уравнения (например, условие непрерывности).

Линейные интегральные уравнения. Это интегральные уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{6}$$

где *φ(x)* – искомая функция, *f(x), K(x,s)* – известные функции, λ – параметр. Функция *K(x,s)* называется *ядром* интегрального уравнения. В зависимости от вида ядра и свободного члена линейные уравнения можно разделить еще на несколько видов.

Уравнения Фредгольма 2-го рода - это уравнения вида:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{7}$$

Пределы интегрирования могут быть как конечными, так и бесконечными. Переменные удовлетворяют неравенству: $a \le x,\ s \le b$, а ядро и свободный член должны быть непрерывными: $K(x,s) \in C(a \le x,\ s \le b)$, $f(x) \in C([a,b])$, либо удовлетворять условиям:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds < +\infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \tag{8}$$

Ядра, удовлетворяющие последнему условию, называют *фредгольмовыми*. Если $f(x) = 0$ на $[a, b]$, то уравнение называется однородным, иначе оно отлично от нуля, называется неоднородным интегральным уравнением.

Уравнения Фредгольма 1-го рода выглядят так же, как и уравнение Фредгольма 2-го рода, только в них отсутствует часть, содержащая неизвестную функцию вне интеграла:

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{9}$$

при этом ядро и свободный член удовлетворяют условиям, сформулированным для уравнений Фредгольма 2-го рода.

Уравнения Вольтерры 2-го рода отличаются от уравнений Фредгольма тем, что один из пределов интегрирования в них является переменным:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,ds + f(x),\ a \le x \le b$$

Уравнения Вольтерры 1-го рода. Также, как и для уравнений Фредгольма, в уравнениях Вольтерры 1-го рода отсутствует неизвестная функция вне интеграла:

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,ds = f(x) \tag{10}$$

В принципе, уравнения Вольтерры можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма, если переопределить ядро:

$$K(x,s) = \begin{cases} K(x,s), & a \le s \le x, \\ 0, & x < s \le b. \end{cases} \tag{11}$$

Однако некоторые свойства уравнений Вольтерры не могут быть применены к уравнениям Фредгольма.

Нелинейные уравнения. Можно придумать немыслимое многообразие нелинейных уравнений, поэтому дать им полную классификацию не представляется возможным. Вот лишь их некоторые типы, имеющие большое теоретическое и прикладное значение.

Уравнения Урысона

$$\varphi(x) = \int_a^b K\big(x,s,\varphi(x)\big)ds, \quad K(x,s,\varphi) \in C(a \le x,s \le b;\ -M \le \varphi \le M) \tag{12}$$

Постоянная M – это некоторое положительное число, которое заранее не всегда может быть определено.

2. Методы решения

Для интегральных уравнений, как и для дифференциальных уравнений не всегда удается получить точное аналитическое решение. Выбор метода решения зависит от вида уравнения. Здесь будут рассмотрены несколько методов для решения линейных интегральных уравнений.

Преобразование Лапласа

Метод преобразования Лапласа может быть применён к интегральному уравнению, если входящий в него интеграл имеет вид свёртки двух функций:

$$\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt = F(p)G(p) \tag{13}$$

то есть, когда ядро является функцией разности двух переменных:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-s)\varphi(s)\,ds \tag{14}$$

Например, дано такое уравнение:

$$\varphi(x) = sinx + 2\int_0^x cos(x-s)\varphi(s)\,ds$$

Применим преобразование Лапласа (13) к обеим частям уравнения:

$$\varphi(x) = \Phi(p)$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{1+p^2} + 2\frac{p'}{1+p^2}\Phi(p) => \Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим:

$$\varphi(x) = \operatorname*{res}_{p=1}\frac{1}{(p-1)^2}e^{px} = (e^{px})'_p\,\big|_{p=1} = xe^x$$

Метод последовательных приближений. Метод последовательных приближений применяется для уравнений Фредгольма 2-го рода, если выполняется условие:

$$|\lambda||b-a|\max_{a\le x,s\le b}|K(x,s)| < 1 \tag{15}$$

Это условие необходимо для сходимости ряда Лиувилля – Неймана:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(K^k f)(x) \tag{16}$$

который и является решением уравнения. $(K^kf)(x)$ – k-ая степень интегрального оператора $(Kf)(x)$:

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x,s)f(s)ds \tag{17}$$

Впрочем, такое решение является хорошим приближением лишь при достаточно малых |λ|. Этот метод применим также и при решении уравнений Вольтерры 2-го рода. В таком случае, ряд Лиувилля-Неймана сходится при любых значениях |λ|, а не только при малых.

Метод резольвент. Метод резольвент является не самым быстрым решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода, однако иногда нельзя указать других путей решения задачи.

Если ввести следующие обозначения:

$$K_0(x,t) = K(x,t),$$
$$K_1(t,s) = K(t,s),$$

то *повторными ядрами* ядра $K(x,s)$ будут ядра $K_p(x,s)$:

$$K_p(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{p-1}(t,s)\,dt \tag{18}$$

Ряд, составленный из повторных ядер,

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x,s) \tag{19}$$

называется резольвентой ядра K(x,s) и является регулярно сходящимся при $a \le x,\ s \le b$ и вышеупомянутому условию сходимости ряда Лиувилля-Неймана. Решение интегрального уравнения представляется по формуле:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)f(s)\,ds \tag{20}$$

Например, для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xs\varphi(s)\,ds \tag{21}$$

повторными будут следующие ядра:

$$K_0(x,s) = xs,$$

$$K_1(x,t) = xt,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 xs\,stds = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 xs\,\frac{st}{3}ds = \frac{xt}{9},$$

$$\dots$$

$$K_{n+1} = \frac{xt}{e^n} \tag{22}$$

а резольвентой – функция

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{xt}{3^n} = xt\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3xt}{3-\lambda} \tag{23}$$

Тогда решение уравнения находится по формуле:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\,dt \qquad (24)$$

Рассмотрим несколько примеров и их решения.

Пример 1. Найти резольвенту для интегральных уравнений Вольтерра со следующим ядром $K(x,t) = e^{x-t}$.

Решение. Имеем $K_{1(x,t)} = K_{(x,t)} = e^{x-t}$. Далее согласно формуле (21) получим

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_n(z,t)\,dz$$

(n = 1, 2, …)

Тогда

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_1(z,t)\,dz = \int_t^x e^{x-t} dz = e^{x-t}(x-t)$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x e^{x-t}\left(e^{x-t}(z-t)\right)dz = \frac{e^{2x-2t}(x-t)^2}{2}$$

$$K_4(x,t) = \int_t^x e^{x-t} \cdot \frac{e^{2x-2t}(x-t)^2}{2} dz = e^{3(x-t)} \cdot \frac{(x-t)^3}{3!}$$

…

$$K_n(x,t) = \int_t^x e^{x-t} \cdot K_{n-1}(z,t)\,dz = \int_0^x e^{x-t} \cdot \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!} dz = e^{(n-1)(x-t)} \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Таким образом,

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{(1+\lambda)(x-t)}$$

Следует отметить, что $e^{(1+\lambda)(x-t)}$ получено из разложения ряда Тейлора

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!}e + \frac{(x-1)^3}{3!}e + \cdots$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение первого рода, предварительно сведя их к интегральным уравнениям второго порядка 2-го рода.

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = sinx$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения по x, получим

$$\varphi(x)e^0 + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = cosx,$$

или

$$\varphi(x) = cosx - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt,$$

Применяя преобразование Лапласа (13), найдем его решение:

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p-1}\Phi(p)$$
$$\Phi(p)\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} : \frac{p}{p-1}$$
$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p-1}{p}$$

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2+1}$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} = \cos x - \sin x$$

Функция $\varphi(x) = \cos x - \sin x$ будет решением уравнения вида

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$$

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt$$

Решение. Известно, что

$$x = \frac{1}{p^2},\ e^{x-t} = \frac{1}{p-1}$$

Пусть $\varphi(x) = \Phi(x)$. Применяя преобразование Лапласа (13) к обеим частям уравнения и учитывая при этом теорему умножения (изображение свертки), получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\Phi(p)$$

Отсюда

$$\Phi(p)\left[1 + \frac{1}{p-1}\right] = \frac{1}{p}$$

$$\Phi(p)\,\frac{p}{p-1} = \frac{1}{p}$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 1 - x$$

Следовательно, решение данного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.

2 Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. / Под ред. Кузнецова П.И. – М.: Наука, 1982. - 304 с.

REFERENCES

1 Krasnov M.L., Kisilyev A.I., Makarenko G.I. Integralnie uravneniya: zadachi i primeri s podpobnymi rescheniyami. – M.: Editorial URSS, 2003. – 192 s.

2 Volterra V. Teoriya funkcionalov, integralnih i ntegro-differencialnih uravneniy. Per. s angl. / Pod red. Kuznecova P.I. – M.: Nauka, 1982. - 304 s.

ТҮЙІН

К.Т. Абдрахманов
Инновациялық Еуразия университеті (Павлодар қ.)

Интегро-дифференциалды теңдеуді шешу әдістері

Бұл мақала [a,b] кесіндісіндегі y(x) - ізделетін функция, K(x, t) и f(x) - белгілі функцияларымен берілген интегро-дифференциалды теңдеуді шығарушыларға арналған. Теңдеуді шығару үшін осы мақалада алдымен анықтамалар мен теориялар танысуға ұсынылады. Одан кейін интегро-дифференциалды теңдеуді шешу әдістері мен бірнеше есептердің шығару жолдары қарастырылады.

Түйін сөздер: *Фредгольм теңдеуі, Вольтер теңдеуі, Урысон теңдеуі, Лаплас түрлендірулері, Тэйлор қатары.*

RESUME

K.T. Abdrakhmanov
Innovative University of Eurasia (Pavlodar)

Methods of integro-differential equations solution.

This article is intended for those who are faced with the task of the integro-differential equation solution where y(x) is the desired function, K(x, t) and f(x) are *known functions defined on the interval [a, b]. To solve the integro-differential equation, in the article it is first encouraged to review the definitions and theorems of integral-differential equations. Next, methods of integral-differential equations solution and some examples of their solution are considered.*

Key words: *Fredholm equation, equation of Volterra, equation of Urysohn, Laplace transformation, Taylor's expansion.*

УДК 514.1

Л.Г. Хомутенко, кандидат физико-математических наук,
Н.Л. Черных
Инновационный Евразийский университет (г. Павлодар)
E-mail: nadyushka_chernyh@mail.ru

О решении геометрических задач с неоднозначным чертежом

Аннотация. *В статье указан несколько нетрадиционный подход к методике решения задач по геометрии с «живым» чертежом в школьном курсе, допускающий неоднозначное построение чертежа согласно исходным данным. Представлены несколько задач такого типа, приведены различные подходы к построению каждого из чертежей этих задач и даны краткие указания к их решениям. Особый интерес учителей и школьников должно привлечь использование геометрией интерпретации этих задач по программе The Geometer's Sketchpad (русская версия "Живая геометрия"), разработанной Николас Жакив и Скотт Стекит.*

Ключевые слова: *четырехугольник, трапеция, касательная, треугольник, окружность.*

Очевидно, что хорошо выполненный чертеж часто облегчает решение задачи. Он может и подсказать какое-либо геометрическое соотношение между отрезками или углами. Но иногда чертеж может стать причиной неполного решения задачи, так как соотношения, выполняющиеся на нем и кажущиеся совершенно очевидными, в действительности таковыми не являются и требуют специального обоснования.